الوحدة الثانية
تفاضل وتكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

٢ - ١ الدالة الأسية واللوغاريتمية ذات الأساس الطبيعى

✸العدد الطبيعى (هـ) او (e) :

تعريف:

العدد الطبيعى (هـ) يعرف من العلاقة: $هـ = \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$

ويعرف العدد (هـ) ايضا **بالعدد النيبيرى أو عدد أويلر**

ملاحظات:

١) يمكن إيجاد قيمة تقريبية للعدد (هـ) باستخدام الآلة الحاسبة بالضغط على Shift ln 1 =
فنجد أن هـ ≃ ٢,٧١٨٢٨١٨٢٨ لأقرب ٩ أرقام عشرية

٢) ∵ $هـ = \lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س}$

بفرض أن $\frac{1}{س} = م$ حيث س ≠ ٠ وعندما س ← ∞ ∴ م ← ٠ ، ∴ $س = \frac{1}{م}$

∴ $\lim_{س \to \infty} \left(1 + \frac{1}{س}\right)^{س} = \lim_{م \to 0} (1 + م)^{\frac{1}{م}}$

أى انه يمكن التعبير عن العدد (هـ) بالصورة: $هـ = \lim_{س \to 0} (1 + س)^{\frac{1}{س}}$

٣) يمكن التعبير عن العدد (هـ) باستخدام متسلسلة تايلور بالصورة:

$$هـ = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots\cdots \infty = \sum_{ن=0}^{\infty} \frac{1}{\lfloor ن}$$

✵ النهايات والعدد (هـ):

توجد بعض النهايات التى تؤدى الى قوى مختلفة للعدد (هـ) كما سيتضح من خلال الأمثلة التالية

مثـــال:

أوجد: (أ) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{\frac{1}{5}س}$ (ب) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{2س+5}$

الحـــل:

(أ) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{\frac{1}{5}س} = \lim_{س \to \infty} \left((1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{\frac{1}{5}} = \left(\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{\frac{1}{5}} = هـ^{\frac{1}{5}}$

(ب) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{2س+5} = \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{2س} \times \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{5}$

$= \left(\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{س}\right)^{2} \times \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{1}{س})^{5}$

$= هـ^{2} \times (1 + 0)^{5} = هـ^{2} \times 1 = هـ^{2}$

مثـــال:

أوجد: (أ) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{3}{س})^{س}$ (ب) $\lim_{س \to \infty} (1 - \frac{1}{س})^{2س}$

(جـ) $\lim_{س \to \infty} (\frac{س}{س+1})^{س}$ (د) $\lim_{س \to \infty} (\frac{2س+5}{2س+1})^{س+2}$

الحـــل:

(أ) $\lim_{س \to \infty} (1 + \frac{3}{س})^{س}$

بفرض أن $\frac{3}{س} = ص$ حيث $س \neq 0$ وعندما $س \to \infty$ $\therefore ص \to 0$ ، $\therefore س = \frac{3}{ص}$

$\therefore \lim_{س \to \infty} (1 + \frac{3}{س})^{س} = \lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{3}{ص}} = \left(\lim_{ص \to 0} (1 + ص)^{\frac{1}{ص}}\right)^{3} = هـ^{3}$

(ب) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١-\frac{١}{س}\right)^{٢س}$

بوضع $\frac{-١}{س}=ص$ حيث $س\neq ٠$ وعندما $س\to\infty$ $\therefore ص\to ٠$ ، $\therefore س=\frac{-١}{ص}$

$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١-\frac{١}{س}\right)^{٢س}=\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{-٢}{ص}}=\left(\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-٢}=هـ^{-٢}$

(جـ) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{س}{س+١}\right)^{س}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{س+١-١}{س+١}\right)^{س}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١+\frac{-١}{س+١}\right)^{س}$

بوضع $\frac{-١}{س+١}=ص$ حيث $س\neq ٠$ وعندما $س\to\infty$ $\therefore ص\to ٠$ $\therefore س=\frac{-١}{ص}-١$

$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١+\frac{-١}{س+١}\right)^{س}=\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{-١}{ص}-١}$

$=\left(\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-١}\times\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{-١}=هـ^{-١}\times ١=هـ^{-١}=\frac{١}{هـ}$

(د) $\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{٢س+٥}{٢س+١}\right)^{س+٢}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(\frac{٢س+١+٤}{٢س+١}\right)^{س+٢}=\underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١+\frac{٤}{٢س+١}\right)^{س+٢}$

بوضع $\frac{٤}{٢س+١}=ص$ $\therefore س=\frac{٢}{ص}-\frac{١}{٢}$ وعندما $س\to\infty$ $\therefore ص\to ٠$

$\therefore \underset{س\to\infty}{\text{نهـا}}\left(١+\frac{٤}{٢س+١}\right)^{س+٢}=\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{٢}{ص}-\frac{١}{٢}+٢}$

$=\left(\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٢}\times\underset{ص\to ٠}{\text{نهـا}}(١+ص)^{\frac{٣}{٢}}=هـ^{٢}\times(١)^{\frac{٣}{٢}}=هـ^{٢}$

✸بعض الاستنتاجات الهامة

∵ $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{س}}=\text{هـ}$ ∴ يمكن استنتاج مايلى:

١) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{1}{\text{س}}\right)^{\text{أس}+\text{ب}}=\text{هـ}^{\text{أ}}$ ٢) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{\text{أ}}{\text{س}}\right)^{\text{بس}+\text{جـ}}=\text{هـ}^{\text{أب}}$

٣) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{\text{أ}}{\text{بس}}\right)^{\text{جس}+\text{د}}=\text{هـ}^{\frac{\text{أجـ}}{\text{ب}}}$ ٤) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{\text{أس}+\text{ب}}{\text{أس}+\text{د}}\right)^{\text{ن س}+\text{م}}=\text{هـ}^{\text{ن}\left(\frac{\text{ب}-\text{د}}{\text{أ}}\right)}$

فمثلا للتأكد من الحل للمثال السابق نـجد أن:

أ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{3}{\text{س}}\right)^{\text{س}}=\text{هـ}^{3\times1}=\text{هـ}^{3}$

ب) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1-\frac{1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(1+\frac{-1}{\text{س}}\right)^{2\text{س}}=\text{هـ}^{-1\times2}=\text{هـ}^{-2}$

جـ) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س}}{\text{س}+1}\right)^{\text{س}}=\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{\text{س}+0}{\text{س}+1}\right)^{\text{س}}=\text{هـ}^{1\times\left(\frac{0-1}{1}\right)}=\text{هـ}^{-1}$

د) $\underset{\text{س}\to\infty}{\text{نها}}\left(\frac{2\text{س}+5}{2\text{س}+1}\right)^{\text{س}+2}=\text{هـ}^{1\times\left(\frac{5-1}{2}\right)}=\text{هـ}^{2}$

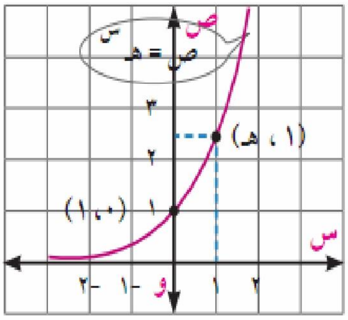
ملاحظة هامة:

الإستنتاجات السابقة يمكن استخدامها فى حل الأسئلة الموضوعية (الإكمال أو الإختيار من متعدد)
أما فى أسئلة المقال فيكون استخدامها للتأكد من صحة الحل وليس لإيجاد الحل.

✱ الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى:

هى دالة أسية أساسها هـ وتكون على الصورة: $د(س) = هـ^{س} \quad ، \quad س \in ع$

خواصها:



١) مجال الدالة الأسية $د(س) = هـ^{س}$ هو ع ومداها] ٠، ∞ [= $ع^{+}$

٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (٠، ١) ، (١ ، هـ)

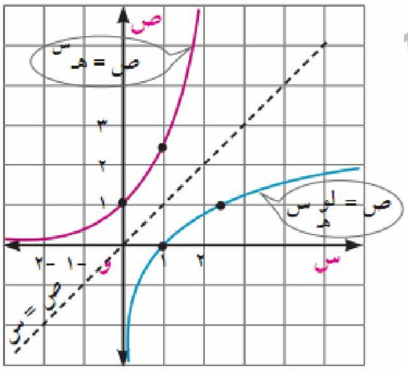
٣) الدالة الاسية $د(س) = هـ^{س}$ هى دالة احادية
ودالتها العكسية هى دالة اللوغاريتم الطبيعى

٤) $\lim_{س \to \infty} هـ^{س} = \infty \quad ، \quad \lim_{س \to -\infty} هـ^{س} = ٠$

✱ دالة اللوغاريتم الطبيعى:

هى دالة لوغاريتمية أساسها هـ وتكون على الصورة: $د(س) = لـو_{هـ} س \quad ، \quad س \in ع^{+}$

خواصها:



١) مجال الدالة اللوغاريتمية $د(س) = لـو_{هـ} س$ هو $ع^{+}$ ومداها ع

٢) منحنى الدالة يمر بالنقط (١، ٠) ، (هـ ، ١)

٣) الدالة اللوغاريتمية هى دالة عكسية للدالة $ص = هـ^{س}$

٤) $\lim_{س \to \infty} لـو_{هـ} س = \infty \quad ، \quad \lim_{س \to ٠^{+}} لـو_{هـ} س = -\infty$

✱ خواص اللوغاريتم الطبيعى:

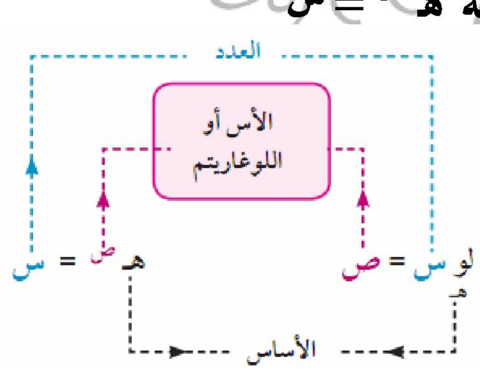
اللوغاريتم الطبيعى له نفس خواص اللوغاريتمات السابق دراستها وهى:

إذا كان $س \in ع^{+}$ ، $ص \in ع$ ، $أ \in ع^{+} - \{١\}$ فإن:

١) الصورة اللوغاريتمية $لـو_{هـ} س = ص$ تكافئ الصورة الأسية $هـ^{ص} = س$

٢) $لـو_{هـ} هـ = ١ \quad ، \quad لـو_{هـ} ١ = ٠$

٣) $هـ^{لـو_{هـ} س} = س$



٤) $لـو_{أ} س = \frac{لـو_{هـ} س}{لـو_{هـ} أ}$ خاصية تغيير الأساس

ولكل $س ، ص \in ع^{+}$ ، $ن \in ع$ فإن:

٥) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س ص} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س} + \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$ **خاصية تحويل الضرب إلى جمع**

٦) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \frac{\text{س}}{\text{ص}} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س} - \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{ص}$ **خاصية تحويل القسمة إلى طرح**

٧) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}^{\text{ن}} = \text{ن} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{س}$ **خاصية تنزيل الأس**

٨) $\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{س} \times \text{لـو}_{\text{س}}\text{هـ} = ١$ **خاصية المعكوس الضربى**

✸ النهايات واللوغاريتم الطبيعى:

توجد بعض النهايات والنتائج التى تحتوى على اللوغاريتم الطبيعى والنهاية الأساسية هى:

$$\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{أ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}\right) = \text{لـو}_{\text{هـ}}\ \text{أ} \qquad \text{حيث } \text{أ} > ٠$$

الإثبات: بوضع $\text{أ}^{\text{س}} - ١ = \text{ص}$ وعندما $\text{س} \to ٠$ فإن $\text{ص} \to ٠$

$\therefore \text{أ}^{\text{س}} = \text{ص} + ١$ بأخذ لوغاريتم الطرفين للأساس هـ

$\therefore \text{س}\,\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ} = \text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+١) \qquad \therefore \text{س} = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+١)}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}$

$$\therefore \underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{أ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}\right) = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{ص}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+١)} \times \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}\right) = \underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\frac{١}{\text{ص}}\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+١)}\right)$$

$$= \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\text{لـو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+١)^{\frac{١}{\text{ص}}}\right)} = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\left(\underset{\text{ص}\to ٠}{\text{نهـا}} (١+\text{ص})^{\frac{١}{\text{ص}}}\right)} = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{هـ}} = \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}}{١} = \text{لـو}_{\text{هـ}}\text{أ}$$

✸ نتائج:

① $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{س}}{\text{أ}^{\text{س}} - ١}\right) = \text{لـو}_{\text{أ}}\ \text{هـ}$

② $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \left(\frac{\text{هـ}^{\text{س}} - ١}{\text{س}}\right) = ١$

③ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لـو}_{\text{أ}}(١+\text{س})}{\text{س}} = \text{لـو}_{\text{أ}}\ \text{هـ}$

④ $\underset{\text{س}\to ٠}{\text{نهـا}} \frac{\text{لـو}_{\text{هـ}}(١+\text{س})}{\text{س}} = ١$

✸ ملاحظة هامة:

النهايات السابقة يتم استخدامها فى حل المسائل كقواعد بوضع المسائل على صورة من هذه الصور وذلك باستخدام بعض العمليات الرياضية مثل التعويض او الإضافة والطرح او ٠٠٠كما سيتضح من الأمثلة التالية

مثال:

أوجد: (أ) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{أ^{٢س} - ١}{س}$ (ب) $\lim\limits_{س \to ٠} (١ + ٣ظا^{٢}س)^{ظتا^{٢}س}$

(ج) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٢س - ١}{٢س + ١}\right)^{س}$ (د) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$

الحل:

(أ) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{أ^{٢س} - ١}{س}$ ، $\because \lim\limits_{س \to ٠} \left(\frac{أ^{س} - ١}{س}\right) = لو_{هـ} أ$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} \frac{أ^{٢س} - ١}{س} = \lim\limits_{س \to ٠} \frac{(أ^{٢})^{س} - ١}{س} = لو_{هـ} أ^{٢} = ٢ لو_{هـ} أ$

(ب) $\lim\limits_{س \to ٠} (١ + ٣ظا^{٢}س)^{ظتا^{٢}س}$

بوضع $٣ظا^{٢}س = ص$ $\therefore ظتا^{٢}س = \frac{٣}{ص}$ وعندما $س \to ٠$ فإن $ص \to ٠$

$\therefore \lim\limits_{س \to ٠} (١ + ٣ظا^{٢}س)^{ظتا^{٢}س} = \lim\limits_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{٣}{ص}} = \left(\lim\limits_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{٣} = هـ^{٣}$

(ج) $\lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٢س - ١}{٢س + ١}\right)^{س} = \lim\limits_{س \to \infty} \left(\frac{٢س + ١ - ٢}{٢س + ١}\right)^{س} = \lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{-٢}{٢س + ١}\right)^{س}$

بوضع $\frac{-٢}{٢س + ١} = ص$ $\therefore س = \frac{-١}{ص} - \frac{١}{٢}$ وعندما $س \to \infty$ $\therefore ص \to ٠$

$\therefore \lim\limits_{س \to \infty} \left(١ + \frac{-٢}{٢س + ١}\right)^{س} = \lim\limits_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{-١}{ص} - \frac{١}{٢}}$

$= \left(\lim\limits_{ص \to ٠} (١ + ص)^{\frac{١}{ص}}\right)^{-١} \times \lim\limits_{ص \to ٠} (١ + ص)^{-\frac{١}{٢}} = هـ^{-١} \times ١ = هـ^{-١}$

(د) $\lim\limits_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}}$ ، $\because \lim\limits_{س \to ٠} \frac{لو_{هـ}(١ + س)}{س} = ١$

$$\therefore \underset{س \to ٠}{نها} \frac{لـو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٢س^{٢}} = \frac{١}{٢} \underset{س \to ٠}{نها} \frac{لـو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{س^{٢}}$$

$$= \frac{٣}{٢} \underset{٣س^{٢} \to ٠}{نها} \frac{لـو_{هـ}(١ + ٣س^{٢})}{٣س^{٢}} = \frac{٣}{٢} \times ١ = \frac{٣}{٢}$$

مثـــال:

أوجد:

(أ) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٥س}$

(ب) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{-س} - ١}{س}$

(جـ) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{لـو_{هـ} س}{س - ١}$

(د) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - هـ^{٢س}}{س}$

(هـ) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{٥^{س} - ١}{٣^{س} - ١}$

(و) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{جا ٣س}{٢^{س} - ١}$

الحـــل:

(أ) $\underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٥س} = \frac{٤}{٥} \underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٤س}$

بوضع ٤س = ص وعندما س $\to$ ٠ $\therefore$ ص $\to$ ٠

$$\therefore \underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٥س} = \frac{٤}{٥} \underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{٤س} - ١}{٤س} = \frac{٤}{٥} \underset{ص \to ٠}{نها} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = \frac{٤}{٥} \times ١ = \frac{٤}{٥}$$

(ب) $\underset{س \to \infty}{نها} \frac{هـ^{-س} - ١}{س}$

بوضع − س = ص وعندما س $\to$ ٠ $\therefore$ ص $\to$ ٠ ، $\therefore$ س = −ص

$$\therefore \underset{س \to ٠}{نها} \frac{هـ^{-س} - ١}{س} = \underset{ص \to ٠}{نها} \frac{هـ^{ص} - ١}{-ص} = - \underset{ص \to ٠}{نها} \frac{هـ^{ص} - ١}{ص} = -١$$

(جـ) $\underset{س \to ١}{نها} \frac{لـو_{هـ} س}{س - ١}$

بوضع س − ١ = ص وعندما س $\to$ ١ فإن ص $\to$ ٠ ، $\therefore$ س = ص + ١

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 1} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}\text{س}}{\text{س}-1} = \lim_{\text{ص}\to 0} \frac{\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ص}+1)}{\text{ص}} = 1$$

د) $$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{4\text{س}} - \text{هـ}^{2\text{س}}}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{هـ}^{2\text{س}}(\text{هـ}^{2\text{س}} - 1)}{\text{س}} = \lim_{\text{س}\to 0} \text{هـ}^{2\text{س}} \times \lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{هـ}^{2\text{س}} - 1)}{\text{س}}$$

$$= \text{هـ}^{0} \times 2 \lim_{\text{س}\to 0} \frac{(\text{هـ}^{2\text{س}} - 1)}{2\text{س}} = 1 \times 2 \times 1 = 2$$

هـ) $$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{5^{\text{س}} - 1}{3^{\text{س}} - 1}$$ بقسمة البسط والمقام على س

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 0} \frac{5^{\text{س}} - 1}{3^{\text{س}} - 1} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{5^{\text{س}} - 1}{\text{س}} \div \lim_{\text{س}\to 0} \frac{3^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \frac{\text{لو}_{\text{هـ}} 5}{\text{لو}_{\text{هـ}} 3} = \text{لو}_{3} 5$$

و) $$\lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}3\text{س}}{2^{\text{س}} - 1}$$ بقسمة البسط والمقام على س

$$\therefore \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}3\text{س}}{2^{\text{س}} - 1} = \lim_{\text{س}\to 0} \frac{\text{جا}3\text{س}}{\text{س}} \div \lim_{\text{س}\to 0} \frac{2^{\text{س}} - 1}{\text{س}} = \frac{3}{\text{لو}_{\text{هـ}} 2}$$

مثـــال:

اثبت أن: $$\lim_{\text{ن}\to \infty} \text{ن}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ن}+1) - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}\right] = 1$$

الحـــل:

الطرف الأيمن $$= \lim_{\text{ن}\to \infty} \text{ن}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}(\text{ن}+1) - \text{لو}_{\text{هـ}}\text{ن}\right] = \lim_{\text{ن}\to \infty} \text{ن}\left[\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\right)\right]$$

$$= \lim_{\text{ن}\to \infty} \left[\text{ن}\,\text{لو}_{\text{هـ}}\left(\frac{\text{ن}+1}{\text{ن}}\right)\right] = \lim_{\text{ن}\to \infty} \left[\text{لو}_{\text{هـ}}\left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right]$$ بتبديل النهاية واللوغاريتم

$$= \text{لو}_{\text{هـ}} \left[\lim_{\text{ن}\to \infty} \left(1+\frac{1}{\text{ن}}\right)^{\text{ن}}\right] = \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{هـ} = 1$$ وهو المطلوب

٢ - ٢ مشتقات الدوال الأسية واللوغاريتمية

✸ مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي:

١) إذا كان $\text{د(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$ فإن $\text{د}'\text{(س)} = \text{هـ}^{\text{س}}$

٢) إذا كان $\text{د(ع)} = \text{هـ}^{\text{ع}}$ فإن $\frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(\text{هـ}^{\text{ع}}\right) = \text{هـ}^{\text{ع}} \times \frac{\text{دع}}{\text{دس}}$

أى أن مشتقة الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعي = الدالة الأسية × مشتقة الأس

مثـــال:

أوجد: المشتقة الأولى لكل من:

(أ) $\text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}٢\text{س}$

(ب) $\text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$

(جـ) $\text{ص} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٧-\text{س}^٢}$

(د) $\text{ص} = \left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}}\right)^٣$

الحـــل:

(أ) $\because \text{ص} = ٢\text{هـ}^{\text{س}} + \text{جتا}٢\text{س}$

$\therefore \text{ص}' = ٢ \times \text{هـ}^{\text{س}} + (-\text{جا}٢\text{س}) \times ٢ = ٢\text{هـ}^{\text{س}} - ٢\text{جا}٢\text{س}$

(ب) $\because \text{ص} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس}$ ← حاصل ضرب

$\therefore \text{ص}' = \text{هـ}^{\text{س}} \times \text{جتاس} + \text{جاس} \times \text{هـ}^{\text{س}} = \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جاس} + \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{جتاس}$

(جـ) $\because \text{ص} = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٧-\text{س}^٢}$

$\therefore \text{ص}' = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٧-\text{س}^٢} \times \frac{\text{د}}{\text{دس}}\left(٧ - \text{س}^٢\right) = \frac{١}{٢}\text{هـ}^{٧-\text{س}^٢}\left(-٢\text{س}\right) = -\text{س}\,\text{هـ}^{٧-\text{س}^٢}$

(د) $\because \text{ص} = \left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{٢\text{س}}\right)^٣$ ← مشتقة قوس

$\therefore \text{ص}' = ٣\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}}\right)^٢ \times \left(\text{هـ}^{٢\text{س}} \times ٢ + \text{هـ}^{-٢\text{س}} \times (-٢)\right)$

$= ٣\left(٢\text{هـ}^{٢\text{س}} - ٢\text{هـ}^{-٢\text{س}}\right)\left(\text{هـ}^{٢\text{س}} + \text{هـ}^{-٢\text{س}}\right)^٢$

✸ مشتقة الدالة الأسية للأساس أ :

١) إذا كان $د(س) = أ^{س}$ فإن $د'(س) = أ^{س} لو_{هـ} أ$

٢) إذا كان $د(ع) = أ^{ع}$ فإن $\frac{ء}{ءس}(أ^{ع}) = أ^{ع} لو_{هـ} أ \times \frac{ءع}{ءس}$

أى أن مشتقة الدالة الأسية للأساس أ = الدالة الأسية × اللوغاريتم الطبيعى للأساس × مشتقة الأس

مثـــال:

أوجد: المشتقة الأولى لكل من:

(أ) $ص = ٥^{س^{٢}+٢س}$ (ب) $ص = ٢^{قا^{٢}س}$ (جـ) $ص = هـ^{٢س} أ^{س^{٢}-٥}$

الحـــل:

(أ) $\because ص = ٥^{س^{٢}+٢س}$

$\therefore ص' = ٥^{س^{٢}+٢س} \times لو_{هـ} ٥ \times \frac{ء}{ءس}(س^{٢} + ٢س) = ٥^{س^{٢}+٢س} \times لو_{هـ} ٥ \times (٢س + ٢)$

(ب) $\because ص = ٢^{قا^{٢}س}$

$\therefore ص' = ٢^{قا^{٢}س} \times لو_{هـ} ٢ \times \frac{ء}{ءس}(قا^{٢}س) = ٢^{قا^{٢}س} \times لو_{هـ} ٢ \times (٢ قاس \times قاس ظاس)$

$= ٢^{قا^{٢}س} \times لو_{هـ} ٢ \times (٢ قا^{٢}س ظاس)$

(جـ) $\because ص = هـ^{٢س} أ^{س^{٢}-٥}$ ← حاصل ضرب

$\therefore ص' = (هـ^{٢س} \times ٢) \times أ^{س^{٢}-٥} + (أ^{س^{٢}-٥} \times لو_{هـ} أ \times ٢س) \times هـ^{٢س}$

$= ٢هـ^{٢س} أ^{س^{٢}-٥} + ٢س هـ^{٢س} أ^{س^{٢}-٥} \times لو_{هـ} أ$

$= ٢هـ^{٢س} أ^{س^{٢}-٥}(١ + س لو_{هـ} أ)$

✸ مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعى:

١) إذا كان $د(س) = لـو_هـ س$ ، $س > ٠$ فإن $د'(س) = \frac{١}{س}$

٢) إذا كان $د(ع) = لـو_هـ ع$ فإن $\frac{ء}{ءس}(لـو_هـ ع) = \frac{١}{ع} \times \frac{ءع}{ءس}$

أى أن مشتقة دالة اللوغاريتم الطبيعى = مقلوب مابعد اللوغاريتم × مشتقة مابعد اللوغاريتم

ملاحظة:

أذا كان $س < ٠$ فإن: $\frac{ء}{ءس}(لـو_هـ(-س)) = \frac{١}{-س} \times (-١) = \frac{١}{س}$

أى أنه بوجه عام يكون $\frac{ء}{ءس}(لـو_هـ|س|) = \frac{١}{س}$ ، $\frac{ء}{ءس}(لـو_هـ|ع|) = \frac{١}{ع} \times \frac{ءع}{ءس}$

مثـــال:

أوجد: $\frac{ءص}{ءس}$ لكل من:

(أ) $ص = لـو_هـ(٧س - ٣)^٢$ (ب) $ص = ٢س^٢ لـو_هـ س^٣$ (جـ) $ص = \frac{س}{لـو_هـ س}$

الحـــل:

(أ) ∵ $ص = لـو_هـ(٧س - ٣)^٢$

∴ $\frac{ءص}{ءس} = \frac{١}{(٧س - ٣)^٢} \times \frac{ء}{ءس}(٧س - ٣)^٢$

$= \frac{١}{(٧س - ٣)^٢} \times ٢(٧س - ٣) \times ٧ = \frac{١٤}{(٧س - ٣)}$

(ب) ∵ $ص = ٢س^٢ لـو_هـ س^٣$ ← حاصل ضرب

∴ $\frac{ءص}{ءس} = ٤س \times لـو_هـ س^٣ + \frac{١}{س^٣} \times ٣س^٢ \times ٢س^٢ = ٤س لـو_هـ س^٣ + ٦س$

(جـ) ∵ $ص = \frac{س}{لـو_هـ س}$ ← خارج قسمة

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1 \times لـو_{هـ} س - \frac{1}{س} \times س}{(لـو_{هـ} س)^{2}} = \frac{لـو_{هـ} س - 1}{(لـو_{هـ} س)^{2}}$$

✱ مشتقة الدالة اللوغاريتمية للأساس أ :

١) إذا كان $د(س) = لـو_{أ} س$ فإن $د'(س) = \frac{1}{س لـو_{هـ} أ}$

٢) إذا كان $د(ع) = لـو_{أ} ع$ فإن $\frac{د}{دس}(لـو_{أ} ع) = \frac{1}{ع لـو_{هـ} أ} \times \frac{دع}{دس}$

أى أن:

مشتقة دالة اللوغاريتم للأساس أ = مقلوب مابعد اللوغاريتم × $\frac{1}{لـو_{هـ} أ}$ × مشتقة مابعد اللوغاريتم

مثـــال:

أوجد ميل المماس لكل من المنحنيات الآتية عند القيم المعطاه:

(أ) $ص = لـو_{2} 5س$ ، $س = 2$		(ب) $ص = لـو_{2} (2س^{2} - 3)^{4}$ ، $س = 1$

الحــــل:

(أ) $\because ص = لـو_{2} 5س$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{5س \times لـو_{هـ} 2} \times 5 = \frac{1}{س لـو_{هـ} 2}$$

عند $س = 2$ $\therefore$ ميل المماس $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=2} = \frac{1}{2 لـو_{هـ} 2} \simeq 0,72$

(ب) $\because ص = لـو_{2} (2س^{2} - 3)^{4}$

$$\therefore \frac{دص}{دس} = \frac{1}{(2س^{2} - 3)^{4} \times لـو_{هـ} 2} \times 4(2س^{2} - 3)^{3} \times 4س = \frac{16س}{(2س^{2} - 3) \times لـو_{هـ} 2}$$

عند $س = 1$ $\therefore$ ميل المماس $= \left[\frac{دص}{دس}\right]_{س=1} = \frac{16}{(2 - 3) \times لـو_{هـ} 2} \simeq -23,08$

✸ الإشتقاق اللوغاريتمي:

بعض العلاقات التى يصعب إيجاد مشتقتها الأولى يتم التعبير عنها بصورة لوغاريتمية بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين و استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط العلاقات ثم إجراء عملية الإشتقاق للطرفين وسوف يتضح ذلك من خلال الأمثلة التالية

مثـــال: أوجد: $\frac{دص}{دس}$ لكل من:

(أ) $ص = س^{٢س}$ (ب) $ص = (جاس)^{س}$ (جـ) $ص^{٢} = ٣^{س} \times ٢^{ص}$

الحـــل:

(أ) $ص = س^{٢س}$

لاحظ أنه لايمكن تطبيق قواعد الإشتقاق لأن الأس به متغير لذلك نأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

$\therefore لـو_{هـ} ص = ٢س لـو_{هـ} س$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{١}{ص}\frac{دص}{دس} = ٢ \times لـو_{هـ} س + \frac{١}{س} \times ٢س$

$\therefore \frac{١}{ص}\frac{دص}{دس} = ٢(لـو_{هـ} س + ١)$ بضرب الطرفين × ص

$\therefore \frac{دص}{دس} = ٢ص(لـو_{هـ} س + ١) = ٢س^{٢س}(لـو_{هـ} س + ١)$

(ب) $ص = (جاس)^{س}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

$\therefore لـو_{هـ} ص = س لـو_{هـ} جاس$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{١}{ص}\frac{دص}{دس} = ١ \times لـو_{هـ} جاس + (\frac{١}{جاس} \times جتاس) \times س$

$\therefore \frac{١}{ص}\frac{دص}{دس} = لـو_{هـ} جاس + س ظتاس$ بضرب الطرفين × ص

$\therefore \frac{دص}{دس} = ص(لـو_{هـ} جاس + س ظتاس) = (لـو_{هـ} جاس + س ظتاس)(جاس)^{س}$

(جـ) $ص^{٢} = ٣^{س} \times ٢^{ص}$ بأخذ اللوغاريتم الطبيعى للطرفين

$\therefore ٢لـو_{هـ} ص = س لـو_{هـ} ٣ + ص لـو_{هـ} ٢$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س

$\therefore \frac{٢}{ص}\frac{دص}{دس} = لـو_{هـ} ٣ + لـو_{هـ} ٢ \times \frac{دص}{دس}$

$\therefore \frac{٢}{ص}\frac{دص}{دس} - لـو_{هـ} ٢ \times \frac{دص}{دس} = لـو_{هـ} ٣$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\frac{٢}{\text{ص}} - \text{لو}_{\text{هـ}}٢\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣$ $\qquad$ $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}}\left(\frac{٢ - \text{ص لو}_{\text{هـ}}٢}{\text{ص}}\right) = \text{لو}_{\text{هـ}}٣$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{لو}_{\text{هـ}}٣ \times \frac{\text{ص}}{٢ - \text{ص لو}_{\text{هـ}}٢} = \frac{\text{ص لو}_{\text{هـ}}٣}{٢ - \text{ص لو}_{\text{هـ}}٢}$

مثـــال:

إذا كانت $\text{ص} = \text{أ هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$ اثبت أن: $\text{س ص} \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^٢ = ٠$

الحـــل:

$\text{ص} = \text{أ هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}}$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س $\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = \text{أ هـ}^{\frac{\text{ب}}{\text{س}}} \times \frac{-\text{ب}}{\text{س}^٢}$

$\therefore \frac{\text{دص}}{\text{دس}} = -\text{ب ص س}^{-٢}$ بإشتقاق الطرفين بالنسبة إلى س مرة ثانية

$\therefore \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = -\text{ب} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \text{س}^{-٢} + (-٢\text{س}^{-٣}) \times (-\text{ب ص})$

وبالتعويض عن: $-\text{ب} = \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

$\therefore \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \frac{١}{\text{س}^٢} - \frac{٢}{\text{س}^٣} \times \frac{\text{س}^٢}{\text{ص}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}} \times \text{ص}$

$\therefore \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \frac{١}{\text{ص}} \times \left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^٢ - \frac{٢}{\text{س}} \times \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$ بضرب الطرفين × س ص

$\therefore \text{س ص} \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} = \text{س}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^٢ - ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}}$

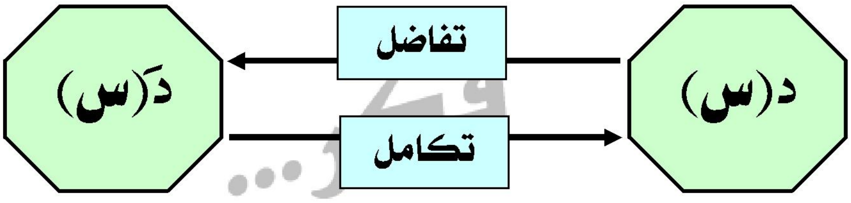
$\therefore \text{س ص} \frac{\text{د}^٢\text{ص}}{\text{دس}^٢} + ٢\text{ص} \frac{\text{دص}}{\text{دس}} - \text{س}\left(\frac{\text{دص}}{\text{دس}}\right)^٢ = ٠$ وهو المطلوب

٢ - ٣ تكامل الدوال الأسية واللوغاريتمية

سبق أن درسنا أنه إذا كانت ص = د(س) فإن عملية التفاضل هى إيجاد المشتقة الأولى للدالة أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$

وإذا كان المعلوم هو المشتقة الأولى للدالة أى $\frac{\text{ءص}}{\text{ءس}}$ فإن عملية إيجاد الدالة الأصلية ص تسمى عملية التكامل أو المشتقة العكسية

أى أن:



فمثلا: إذا كان ن(س) = هـ^س + ٥ فإن نَ(س) = هـ^س

وإذا كان نَ(س) = هـ^س فإنه بعملية عكسية يمكن إيجاد عدد غير محدود من المشتقات العكسية وتكون مشتقة كل منها هـ^س مثل: هـ^س + ٥ ، هـ^س − ٣، هـ^س + ث حيث ث ∈ ح

وعلمنا أن مجموعة المشتقات العكسية للدالة د تسمى التكامل غير المحدد لهذه الدالة ويرمز لها بالرمز ∫د(س)ءس (ويقرأ تكامل دالة س بالنسبة إلى س) ويكون

$$\int \text{د(س)}\,\text{ءس} = \text{ت(س)} + \text{ث}$$ حيث ث ثابت التكامل

✸ التكامل غير المحدد للدالة الأسية:

إذا كان ك عددا حقيقيا حيث ك ≠ ٠ فإن:

$$\int \text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس} = \text{هـ}^{\text{س}} + \text{ث} \quad ، \quad \int \text{هـ}^{\text{كس}}\,\text{ءس} = \frac{١}{\text{ك}}\,\text{هـ}^{\text{كس}} + \text{ث}$$

حيث ث ثابت إختيارى

أى أن تكامل الدالة الأسية ذات الأساس الطبيعى = الدالة الأسية ÷ معامل الأس

مثـــــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \pi\,\text{هـ}^{\text{س}}\,\text{ءس}$ (ب) $\int -\text{هـ}^{-٥\text{ع}}\,\text{ءع}$ (ج) $\int -٦\,\text{هـ}^{٠{,}٢\text{ص}}\,\text{ءص}$ (د) $\int ٣\sqrt{٢}\,\text{هـ}^{-\sqrt{٢}\,\text{ن}}\,\text{ءن}$

الحل:

> **تذكر أن**
> $\int أ\,د(س)\,ءس = أ\int د(س)\,ءس$

(أ) $\int \pi هـ^{س}\,ءس = \pi \int هـ^{س}\,ءس = \pi هـ^{س} + ث$

(ب) $\int -هـ^{-٥ع}\,ءع = \frac{-١}{-٥} هـ^{-٥ع} + ث = \frac{١}{٥} هـ^{-٥ع} + ث$

(جـ) $\int -٦ هـ^{٠٫٢ص}\,ءص = -٦ \int هـ^{٠٫٢ص}\,ءص = \frac{-٦}{٠٫٢} هـ^{٠٫٢ص} + ث = -٣٠ هـ^{٠٫٢ص} + ث$

(د) $\int ٣\sqrt{٢}\, هـ^{-\sqrt{٢}ن}\,ءن = ٣\sqrt{٢} \int هـ^{-\sqrt{٢}ن}\,ءن = \frac{٣\sqrt{٢}}{-\sqrt{٢}} هـ^{-\sqrt{٢}ن} + ث = -٣ هـ^{-\sqrt{٢}ن} + ث$

مثال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\,ءس$ (ب) $\int (س^{٢} + ٢هـ^{س})\,ءس$ (جـ) $\int (س^{٢هـ} + هـ^{٣س})\,ءس$

الحل:

(أ) $\int \frac{هـ^{س} + هـ^{-س}}{هـ^{س}}\,ءس = \int ءس + \int هـ^{-٢س}\,ءس = س - \frac{١}{٢} هـ^{-٢س} + ث$

(ب) $\int (س^{٢} + ٢هـ^{س})\,ءس = \int س^{٢}\,ءس + ٢\int هـ^{س}\,ءس = \frac{١}{٣} س^{٣} + ٢هـ^{س} + ث$

(جـ) $\int (س^{٢هـ} + هـ^{٣س})\,ءس = \int س^{٢هـ}\,ءس + \int هـ^{٣س}\,ءس = \frac{١}{٢هـ+١} س^{٢هـ+١} + \frac{١}{٣} هـ^{٣س} + ث$

تذكر أن:

١- $\int س^{ن}\,ءس = \frac{س^{ن+١}}{ن+١} + ث$

٢- $\int (أس + ب)^{ن}\,ءس = \frac{١}{أ} \times \frac{(أس + ب)^{ن+١}}{ن+١} + ث$

٣- $\int (د(س))^{ن}\, د'(س)\,ءس = \frac{(د(س))^{ن+١}}{ن+١} + ث$

قاعدة:

إذا كان د(س) دالة قابلة للإشتقاق فإن:

$\int هـ^{د(س)} \cdot د'(س) \, ءس = هـ^{د(س)} + ث$ حيث ث ثابت إختيارى

أى أن:

تكامل الدالة الأسية مرفوعة لأس × مشتقة الأس = الدالة الأسية مرفوعة لنفس الأس

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int (جتاس \, هـ^{جاس} + ٣س^٢) \, ءس$ (ب) $\int (س - ٣) هـ^{س^٢ - ٦س + ٥} \, ءس$

الحـــل:

(أ) $\int (جتاس \, هـ^{جاس} + ٣س^٢) \, ءس$ ∵ مشتقة الأس = جتاس

∴ $\int (جتاس \, هـ^{جاس} + ٣س^٢) \, ءس = \int جتاس \, هـ^{جاس} \, ءس + \int ٣س^٢ \, ءس = هـ^{جاس} + س^٣ + ث$

(ب) $\int (س - ٣) هـ^{س^٢ - ٦س + ٥} \, ءس$ ∵ مشتقة الأس = ٢س − ٦

∴ $\int (س - ٣) هـ^{س^٢ - ٦س + ٥} \, ءس = \frac{١}{٢} \int (٢س - ٦) هـ^{س^٢ - ٦س + ٥} \, ءس$

$= \frac{١}{٢} هـ^{س^٢ - ٦س + ٥} + ث$

✸ التكامل غير المحدد للدالة الأسية للأساس أ :

١) $\int أ^{س} \, ءس = \frac{أ^{س}}{لـو_{هـ} أ} + ث$ ٢) $\int أ^{د(س)} \cdot د'(س) \, ءس = \frac{أ^{د(س)}}{لـو_{هـ} أ} + ث$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int (\pi^٤ + \pi^{س}) \, ءس$ (ب) $\int ٣^{س} \times هـ^{س} \, ءس$ (جـ) $\int ٣^{جاس} \, جتاس \, ءس$

الحـــل:

(أ) $\int (\pi^{4} + \pi^{س})\, ءس = \pi^{4} س + \frac{\pi^{س}}{لـو_{هـ} \pi} + ث$

(ب) $\int ٣^{س} \times هـ^{س}\, ءس = \int (٣هـ)^{س}\, ءس = \frac{(٣هـ)^{س}}{لـو_{هـ} (٣هـ)} + ث$

(جـ) $\int ٣^{جتاس}\, جاس\, ءس$ $\therefore \frac{ء}{ءس}(جتاس) = -جاس$

$\therefore \int ٣^{جتاس}\, جتاس\, ءس = -\int ٣^{جتاس} (-جتاس)\, ءس = \frac{-٣^{جتاس}}{لـو_{هـ} ٣} + ث$

✸ تكامل يتضمن الدالة اللوغاريتمية:

> $\int \frac{١}{س}\, ءس = لـو_{هـ}|س| + ث$ حيث $س \neq ٠$ ، ث ثابت إختيارى

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{لـو_{هـ}٣}{س}\, ءس$ (ب) $\int \frac{٤}{٣س لـو_{هـ}٥}\, ءس$ (جـ) $\int \frac{لـو_{هـ}س^{٢}}{س لـو_{هـ}س^{٣}}\, ءس$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{لـو_{هـ}٣}{س}\, ءس = لـو_{هـ}٣ \int \frac{١}{س}\, ءس = لـو_{هـ}٣ \times لـو_{هـ}|س| + ث$

(ب) $\int \frac{٤}{٣س لـو_{هـ}٥}\, ءس = \frac{٤}{٣لـو_{هـ}٥} \int \frac{١}{س}\, ءس = \frac{٤}{٣لـو_{هـ}٥} \times لـو_{هـ}|س| + ث$

(جـ) $\int \frac{لـو_{هـ}س^{٢}}{س لـو_{هـ}س^{٣}}\, ءس = \int \frac{٢لـو_{هـ}س}{س \times ٣لـو_{هـ}س}\, ءس = \frac{٢}{٣} \int \frac{١}{س}\, ءس = \frac{٢}{٣} لـو_{هـ}|س| + ث$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{٦س^{٢} - ٥}{٣س}\, ءس$ (ب) $\int \frac{س^{٢} - ٤}{س^{٢} - ٢س}\, ءس$ (جـ) $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}})^{٢}\, ءس$

الحــــل:

(أ) $\int \frac{٦س^٢ - ٥}{٣س} ء س = \int (٢س - \frac{٥}{٣س}) ء س = س^٢ - \frac{٥}{٣} لــو_هـ |س| + ث$

(ب) $\int \frac{س^٢ - ٤}{س^٢ - ٢س} ء س = \int \frac{(س - ٢)(س + ٢)}{س(س - ٢)} ء س = \int \frac{س + ٢}{س} ء س$

$= \int (١ + \frac{٢}{س}) ء س = س + ٢ لــو_هـ |س| + ث$

(جـ) $\int (\sqrt{س} - \frac{٣}{\sqrt{س}})^٢ ء س = \int (س - ٦ + \frac{٩}{س}) ء س = \frac{١}{٢} س^٢ - ٦س + ٩ لــو_هـ |س| + ث$

قاعدة:

إذا كان د(س) دالة قابلة للإشتقاق ، د(س) $\neq$ ٠ فإن:

$\int \frac{د'(س)}{د(س)} ء س = لــو_هـ |د(س)| + ث$ **حيث ث ثابت إختيارى**

أى أنه: **إذا كان البسط هو مشتقة المقام فإن التكامل يساوى لوغاريتم المقام للأساس هـ**

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int ظتاس ء س$ (ب) $\int \frac{٦س + ٩}{س^٢ + ٣س} ء س$ (جـ) $\int \frac{س^٢ + ٢}{س^٣ + ٦س + ١} ء س$

الحــــل:

(أ) $\int ظتاس ء س = \int \frac{جتاس}{جاس} ء س$ $\because \frac{ء}{ء س}(جاس) = جتاس$

$\therefore \int ظتاس ء س = \int \frac{جتاس}{جاس} ء س = لــو_هـ |جاس| + ث$

(ب) $\int \frac{٦س + ٩}{س^٢ + ٣س} ء س$ $\because \frac{ء}{ء س}(س^٢ + ٣س) = ٢س + ٣$

$\therefore \int \frac{٦س + ٩}{س^٢ + ٣س} ء س = ٣ \int \frac{٢س + ٣}{س^٢ + ٣س} ء س = ٣ لــو_هـ |س^٢ + ٣س| + ث$

(جـ) $\int \frac{س^٢ + ٢}{س^٣ + ٦س + ١} ء س$ $\because \frac{ء}{ء س}(س^٣ + ٦س + ١) = ٣س^٢ + ٦$

$\therefore \int \frac{س^2+2}{س^3+6س+1}\,ءس = \frac{1}{3}\int \frac{3س^2+6}{س^3+6س+1}\,ءس = \frac{1}{3}لـو_هـ|س^3+6س+1|+ث$

مثـــال: أوجد التكاملات الآتية:

(أ) $\int \frac{1+ظاس}{س+لـو_هـ قاس}\,ءس$ (ب) $\int ظتا^3س\,ءس$

الحـــل:

(أ) $\int \frac{1+ظاس}{س+لـو_هـ قاس}\,ءس \quad \because \frac{ء}{ءس}(س+لـو_هـ قاس) = 1+\frac{1}{قاس}\times قاس ظاس = 1+ظاس$

$\therefore \int \frac{1+ظاس}{س+لـو_هـ قاس}\,ءس = لـو_هـ|س+لـو_هـ قاس|+ث$

(ب) $\int ظتا^3س\,ءس = \int ظتاس\,ظتا^2س\,ءس = \int ظتاس(قتا^2س-1)\,ءس$

$= \int (ظتاس\,قتا^2س - \frac{جتاس}{جاس})\,ءس$

$\because \frac{ء}{ءس}(ظتاس) = -قتا^2س \quad \because \frac{ء}{ءس}(جاس) = جتاس$

$\therefore \int ظتا^3س\,ءس = \int (ظتاس\,قتا^2س - \frac{جتاس}{جاس})\,ءس = -\frac{1}{2}ظتا^2س - لـو_هـ|جاس|+ث$

مثـــال: ميل المماس لمنحنى الدالة د عند أى نقطة عليه (س، ص) يساوى $\frac{1}{2س-هـ}$

فإذا كان $د(هـ) = \frac{1}{2}$ أوجد د(2هـ)

الحـــل:

$\because \frac{ءص}{ءس} = \frac{1}{2س-هـ} \quad \therefore د(س) = \int \frac{1}{2س-هـ}\,ءس \quad \because \frac{ء}{ءس}(2س-هـ) = 2$

$\therefore د(س) = \frac{1}{2}\int \frac{2}{2س-هـ}\,ءس = \frac{1}{2}لـو_هـ|2س-هـ|+ث$

$\because د(هـ) = \frac{1}{2} \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}لـو_هـ|2هـ-هـ|+ث \quad \therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}لـو_هـ|هـ|+ث$

$\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ لـوهـ هـ + ث $\therefore \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \times 1 +$ ث $\therefore$ ث $= 0$

$\therefore$ د(س) $= \frac{1}{2}$ لـوهـ |٢س − هـ|

$\therefore$ د(٢هـ) $= \frac{1}{2}$ لـوهـ |٢ × ٢هـ − هـ| $\therefore$ د(٢هـ) $= \frac{1}{2}$ لـوهـ |٣هـ|

مثـــال:

إذا كان معدل تغير مبيعات أحد المصانع يتناسب عكسيا مع الزمن بالأسابيع ، وكانت مبيعات المصنع بعد اسبوعين و ٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة . أوجد مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع.

الحـــل:

نفرض أن مبيعات المصنع = م وحدة

$\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} \alpha \frac{1}{\text{ن}}$ $\therefore \frac{\text{ءم}}{\text{ءن}} = \frac{\text{ك}}{\text{ن}}$ حيث ك ثابت التناسب

$\therefore$ م $= \int \frac{\text{ك}}{\text{ن}}$ ءن $=$ ك $\int \frac{1}{\text{ن}}$ ءن $\Leftarrow$ $\therefore$ م = ك لـوهـ ن + ث

$\because$ مبيعات المصنع بعد اسبوعين و ٤ أسابيع هى على الترتيب ٢٠٠ ، ٣٠٠ وحدة

$\therefore$ ٢٠٠ = ك لـوهـ ٢ + ث (١) ، ٣٠٠ = ك لـوهـ ٤ + ث

، ٣٠٠ = ك لـوهـ $٢^٢$ + ث $\therefore$ ٣٠٠ = ٢ك لـوهـ ٢ + ث (٢)

بطرح المعادلتين (١) ، (٢) $\therefore$ ١٠٠ = ك لـوهـ ٢ $\therefore$ ك $= \frac{100}{\text{لـوهـ } 2}$

بالتعويض فى (١) $\therefore$ ٢٠٠ $= \frac{100}{\text{لـوهـ } 2} \times$ لـوهـ ٢ + ث $\therefore$ ث = ١٠٠

$\because$ م = ك لـوهـ ن + ث $\Leftarrow$ $\therefore$ م $= \frac{100}{\text{لـوهـ } 2} \times$ لـوهـ ن + ١٠٠

$\therefore$ مبيعات المصنع بعد ٨ أسابيع أى عندما ن = ٨ هى:

م $= \frac{100}{\text{لـوهـ } 2} \times$ لـوهـ ٨ + ١٠٠ $= \frac{100}{\text{لـوهـ } 2} \times$ ٣لـوهـ ٢ + ١٠٠ = ٤٠٠ وحدة